Kuyruk Teorisi(Y. L.)

9. Hafta

$M/M/c$ Sistemi ve Analizi(devam...)

Sistemin Tanımı

Bu sistem sonsuz müşteri kaynaklı Poisson geliş akımlı c kanaldan oluşmuş her bir kanaldaki müşterinin hizmet süreleri üstel dağılıma uymaktadır. Sistem ilk gelene ilk hizmet disiplini ile çalışır. Müşteri sisteme geldiğinde kanalların tümü de doluysa hizmet almak için bekleme hattına girer.

$M/M/c$ için Ergodiklik Şartı

X_t, t anında sisteme gelen müşteri sayısı olmak üzere $p_n = \lim_{t\to\infty} P(X_t = n)$ limiti varsa ve bu limit $p_n \geq 0, \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ koşulu sağlanırsa p_n'e 'ergodik dağılım gösterir denir. Kabul edelim ki ergodiklik koşulu sağlanıyor. Buna göre p_n olasılığının bulunması gerekir, bunun için de doğum ölüm parametrelerinin bulunması gerekir.

Sistemin parametrelerinin(göstergelerinin) bulunması

λ , Birim zamanda sisteme gelen ortalama müşteri sayısını gösterir.

μ , Birim zamanda her bir kanaldaki hizmet süresidir

$c\mu$, Birim zamanda sistemden hizmet alan ortalama müşteri sayısını gösterir.

Sistem gelen müşterilerin hepsine hizmet verileceğinden $M/M/c$ sisteminde $(\lambda/c\mu) < 1$ koşulunun sağlanması gerekir. Yani sistemde hiçbir zaman sonsuz sayıda müşteri olmaz. Buna ergodiklik koşulu denir.

i) Doğum parametrelerinin bulunması:

$$P_{n,n+1}(h) = P(X_{t+h} = n + 1/X_t = n)$$

$$= P(X_h = 1)(P(\xi > h))^n$$

$$= P(X_h = 1)(1 - P(\xi \leq h))^n$$

$$= \frac{e^{-\lambda h}}{1!}\lambda h(e^{-\lambda h})^n$$

$$= (\mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda h} + \boldsymbol{o(h)})\boldsymbol{\lambda h e^{-\lambda h n}}$$

$$= \lambda h e^{-\lambda h n} - (\lambda h)^2 e^{-\lambda h n} + o(h)$$

$h \to 0$ için

$$\lim_{h\to0}\frac{P_{n,n+1}(h)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\lambda h e^{-\lambda hn}}{h} - \lim_{h\to0}\frac{(\lambda h^2 e^{-\lambda hn}}{h} + \lim_{h\to0}\frac{o(h)}{h}$$

$$\lim_{h\to0}\frac{P_{n,n+1}(h)}{h} = \lambda \quad \Rightarrow \quad P_{n,n+1}(h) = \lambda h + o(h)$$

Ayrıca doğum- ölüm sürecinden $\lambda_n = a_{n,n+1} = p'_{n,n+1}(0)$

$$p'_{n,n+1}(0) = \lim_{h\to0}\frac{P_{n,n+1}(h) - P_{n,n+1}(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{\lambda h + o(h) - 0}{h} = \lambda$$

$\forall\ n$ için $\lambda_n = \lambda$ bulunur.

ii) Ölüm parametresinin bulunması

$$\mu_n = a_{n,n-1} = p'_{n,n-1}(0) = \lim_{h\to0}\frac{P_{n,n-1}(h) - P_{n,n-1}(0)}{h}$$

eğer herhangi bir anda n tane müşteri varsa h süresinde bir müşterinin hizmet alması olasılığı ya da bir kanalın boşalması ve h süresinde müşteri gelmeme olasılığı $P_{n,n-1}(h)$ dır.

$P_{n,n-1}(h)$'ın bulunması :

a) $n \le c$ ise sistemde bekleme yoktur(müşteri sayısı en fazla kanal sayısına eşittir).

$$P_{n,n-1}(h) = P(X_h = 0)P(\mu_h = 1)$$

Bir kanalın boşalması olasılığı $1 - e^{-\mu_h} = p$, boşalmaması olasılığı $e^{-\mu_h} = q$ dır. n kanaldan birisinin boşalması ya da hizmetin tamamlanması $\binom{n}{1}$ sayıda olacağından

$$P(\mu_h = 1) = \binom{n}{1}(1 - e^{-\mu_h})^1(e^{-\mu_h})^{n-1}$$

Bu eşitliğin her iki yanı $P(X_h = 0)$ ile çarpılırsa

$$P_{n,n-1}(h) = ne^{-\lambda h}(1 - e^{-\mu_h})^1(e^{-\mu_h})^{n-1} + o(h)$$

$h \to 0$ için

$$\boldsymbol{p'_{n,n-1}(0) = \lim_{h\to0}\frac{ne^{-\lambda h}(1 - e^{-\mu_h})^1(e^{-\mu_h})^{n-1} + o(h)}{h}}$$

$$= n(-\lambda - \mu(n-1) + \lambda) = n\mu$$

Sonuç olarak $n \leq c$ için $\mu_n = n\mu$ elde edilir.

b) $n > c$ için (tüm kanallar dolu ise) herhangi bir kanaldan ayrılış olcak

$$P_{n,n-1}(h) = P(X_h = 0)P(\mu_h = 1)$$

İfadesi dikkate alınarak $\mu_n = c\mu$ bulunur.

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & ; \ n \leq c \\ c\mu & ; \ n > c \end{cases}$$

$p_n = \theta_n p_0$ olduğu dolum-ölüm sürecinden elde edilmişti,

$$\theta_n = \frac{\lambda_0 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \ldots \mu_n}$$

$n \leq c$ için $\theta_n = ?$

$$\theta_n = \frac{\lambda^n}{1\mu 2\mu \ldots n\mu} = \frac{\lambda^n}{\mu^n n!} = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \rho$$

alındığında

$$\theta_n = \frac{1}{n!}\rho^n$$

bulunur. $p_n = \theta_n p_0$ eşitliğinde θ_n yerine yazılırsa $p_n = \frac{1}{n!}\rho^n p_0$ elde edilir.

$n \geq c$ için $\theta_n = ?$

$$\theta_n = \frac{\lambda^n}{\mu_1 \ldots \mu_c \mu_{c+1} \ldots \mu_n} = \frac{\lambda^n}{c!\,\rho^c (c\mu)^{n-c}} = \frac{\rho^n}{c!}\left(\frac{\rho}{n}\right)^{n-c}$$

Böylece aranan olasılık

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\rho^n}{n!} p_0 & ; \quad n \le c \\ p_c \left(\dfrac{\rho}{c}\right)^{n-c} & ; \quad n \ge c \end{cases}$$

Böylece sistemde herhangi bir anda n tane müşteri olması olasılığı olan p_n elde edilmiş olur. Müşteri kanallar dolu olduğu zaman bekleme hattının boşalmasını bekler , hizmet aldıktan sonra sistemi terk eder.

$W(W \ge 0)$ herhangi bir müşterinin kuyrukta bekleme süresi olsun. Müşteri sisteme geldiğinde tüm kanallar doludur. Bu raslantı değişkeninin $P(W = 0)$ olasılığını hesaplayalım.Bu olasılık sürekli raslantı değişkenler için sıfırdır. X sistemdeki müşteri sayısı olmak üzere Sisteme gelen müşterinin sistemde beklemesi için X in en az c olması gerekir $\left(\frac{\rho}{c} < 1\right)$.

$$P(W = 0) = 1 - P(W > 0)$$

$$P(W > 0) = P(X \ge c) = \sum_{n=c}^{\infty} P(X = n) = \sum_{n=c}^{\infty} p_n$$

$$= \sum_{n=c}^{\infty} p_c \left(\frac{\rho}{c}\right)^{n-c} = \frac{p_c}{1 - \frac{\rho}{c}} > 0$$

$$P(W = 0) = 1 - \frac{p_c}{1 - \frac{\rho}{c}}$$

(Burada W sürekli değildir)

W nin dağılım fonksiyonunu bulursak

$P(W < t) = 1 - P(W \ge t)$,

$t \le 0$ ise $F(t) = 0$ olur.

$t > 0$ için $P(W \ge t)$ aşağıdaki gibi elde edilir.

Bu olasılığı bulmak için tam olasılık formülünden faydalanalım.

$$P(W \ge t) = \sum_{n=c}^{\infty} P(W \ge t / X = n)\, P(X = n) \qquad \textbf{(1)}$$

$\boldsymbol{X = n}$ olduğunda $\boldsymbol{W = X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-c+1}}$ olur . $\boldsymbol{X_1, X_2}$' ler aynı dağılıma sahip bağımsız tesadüfi değişkenleridir. Her bir $\boldsymbol{X_i}$ $\boldsymbol{c}$ kanaldan en az birinin boşalmasına kadar geçen süredir. $\boldsymbol{W}$'nin dağılım fonksiyonunu bulmak için $\boldsymbol{X_i}$'lerin herhangi birisinin dağılım fonksiyonunu bulmak yeterlidir.

Farz edelim $X_1, X_2, .., X_{n-c+1}$'ler bağımsız ve her biri μ parametreli üstel dağılıma sahiptir. $U = X_1 + X_2 + \cdots + X_r$' lerin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{\mathrm{U}}(\, x) = \frac{\mu\,(\mu\, x)^{r-1} e^{-\mu\, x}}{\Gamma(r)},$$

biçimindedir(Poisson sürecinin 7. Özelliğinden)

W'nın yoğunluk fonksiyonunda $n - c + 1$ tane tesadüfi değişkenin toplamı dikkate alındığından ve $n > c$ için μ'nün yerine $c\mu$ alındığında

$$\boldsymbol{f_{\mathrm{W}}(\, x/n) = \frac{c\mu\,(\mathrm{c}\mu\, x)^{n-c} e^{-\mathrm{c}\mu\, x}}{\Gamma(n - c + 1)} = \frac{c\mu\,(\mathrm{c}\mu\, x)^{n-c} e^{-\mathrm{c}\mu\, x}}{(n - c)!}}$$

$$\boldsymbol{P(W \geq t / X = n) = \int_{\mathrm{t}}^{\infty} \frac{c\mu\,(\mathrm{c}\mu\, x)^{n-c} e^{-\mathrm{c}\mu\, x}}{(n - c)!} \mathrm{dx}}$$

$P(X = n)$ ve $P(W \geq t / X = n)$ (1) de yerine konulduğunda

$$\boldsymbol{P(W \geq t) = \sum_{n=c}^{\infty} \left(\int_{\mathrm{t}}^{\infty} \frac{c\mu\,(\mathrm{c}\mu\, x)^{n-c} e^{-\mathrm{c}\mu\, x}}{(n - c)!} \mathrm{dx} \right) p_c \left(\frac{\rho}{c} \right)^{n-c}}$$

$$\boldsymbol{= \int_{\mathrm{t}}^{\infty} \left(\sum_{\mathrm{n=c}}^{\infty} \frac{(\mu\rho\, x)^{n-c} e^{-\mathrm{c}\mu\, x}}{(n - c)!} \right) \mathrm{dx}\, c\mu p_c}$$

$$\boldsymbol{= c\mu p_c \int_{\mathrm{t}}^{\infty} e^{\mu\rho\, x - \mathrm{c}\mu\, x}\, \mathrm{dx} = \frac{c\mu p_c}{(c-\rho)\mu} e^{-(c-\rho)\mu t}}$$

$$\boldsymbol{P(W \geq t) = \frac{c\mu p_c}{(c-\rho)\mu} e^{-(c-\rho)\mu t}}$$

$$P(W < t) = 1 - \frac{c\mu p_c}{(c-\rho)\mu} e^{-(c-\rho)\mu t} \quad , \ t > 0 \ \text{için}$$

W'nın dağılım fonksiyonu bulundu. Şimdi X_q'nun beklenen değerini bulalım.

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\rho^n}{n!} p_0 & ; \quad n \le c \\ p_c \left(\dfrac{\rho}{c}\right)^{n-c} & ; \quad n \ge c \end{cases}$$

Burada ,

$$p_c = \frac{\rho^c}{c!} p_0$$

X_q, bekleme hattındaki müşteri sayısı olarak tanımlanıyor.

Performans Ölçüleri

1) Kuyruktaki ortalama müşteri sayısı (L_q)

$$E(X_q = n - c) = L_q$$

$$E(X_q = n - c) = \sum_{n=c}^{\infty} (n-c) p_c \left(\frac{\rho}{c}\right)^{n-c}$$

ifadesinde $(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{u}$ **alındığında**

$$= p_c \sum_{u=0}^{\infty} u \left(\frac{\rho}{c}\right)^u$$

$$L_q = \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!\,(c-\rho)^2} p_0$$

bulunur.

2) Sistemdeki ortalama müşteri sayısı(L)

$$L = L_q + \rho = \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} p_0 + \rho$$

$$L = \lambda W$$

3) Bir müşterinin kuyrukta ortalama bekleme süresi (W_q)

İki biçimde bulunabilir.

1) Little formülüne göre

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$= \frac{\mu\rho^c}{(c-1)!\,(c\mu-\lambda)^2} p_0$$

2) W rastlantı değişkenin dağılım fonksiyonun kuyruğundan yararlanarak,

$$F(t) = P(W < t) = 1 - P(W \geq t)$$

$$W_q = EW = \int_0^\infty \big(1 - F(t)\big)dt = \int_0^\infty P(W < t)dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{c\mu p_c}{(c\mu-\lambda)} e^{-(c\mu-\lambda)} dt$$

$$= \frac{c\mu p_c}{(c\mu-\lambda)^2}$$

$p_c = \frac{\rho^c}{c!} p_0$ $\quad W_q$'da yerine yazılırsa

$$W_q = \frac{\mu\rho^c}{(c\mu-\lambda)^2(c-1)!} p_0$$

4) Bir müşterinin sistemde ortalama bekleme süresi(W_s)

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$= \frac{\mu\rho^c}{(c\mu-\lambda)^2(c-1)!} p_0 + \frac{1}{\mu}$$